

$$1.) \int \frac{2x}{x^2+3} dx$$

- 1.) Poslať prezenku
- 2.) Spustiť si časovač
- 3.) Ak vznikli povedať poznámky ku zápočtu.

Príklad 1a):

- Ciele:
- ukázať rozklad odhadnutím koreňa
 - ukázať rozklad pomocou vzorca na kvadratické rovnice
 - vyrátať čitatele parciálnych zlomkov štandardne (porovnaním koeficientov)
 - upozorniť na definčný obor

$$\int \frac{2x^2+3x+1}{2x^3+7x^2+8x+3} dx = I$$

- Na papieriku v návodu máš popísané riešenia niektorých racionálnych funkcií. Metóda rozkladu na parciálne zlomky tento problém prevádza na tvar z návodu.

1) Najprv musíme rozložiť menovateľ na súčin už ďalej nerozložiteľných polynómov, nutne má teda stupeň 1, poprípade 2.

- Pred nami je v menovateli polynóm stupňa 3, nemáme efektívny vzorec, skúsme odhadnúť dĺžky koreň, (oplatí sa vyskúšať ± 1).

$$2 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 3 = 0$$

$$(2x^3+7x^2+8x+3) : (x+1) = 2x^2+5x+3$$

$$\begin{array}{r} -(2x^3+2x^2) \\ \hline 5x^2+8x+3 \\ -(5x^2+5x) \\ \hline 3x+3 \\ \hline 3x+3 \end{array}$$

Ostáva nám kvadratický výraz, naň máme vzorec (avšak stále môžeme odhadnúť).

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{(2x+1)(x+1)}{(2x+3)(x+1)(x+1)} dx = \int \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{x+1} dx$$

Ked' máme polynóm rozložený, tak potrebujeme výraz rozdeliť na takzvané parciálne zlomky:

$$(2x+3) \cdot A + (x+1) \cdot B = 2x+1$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow 2A+B &= 2 & \Rightarrow A &= -1 \\ 3A+B &= 1 & B &= 4 \end{aligned}$$

$$\int \frac{-1}{x+1} + \frac{4}{2x+3} dx = -\ln|x+1| + \int \frac{4}{2x+3} dx = -\ln|x+1| + \int \frac{2}{y} dy =$$

$$2x+3 = y$$

$$2dx = dy$$

$$= -\ln|x+1| + 2\ln|2x+3|$$

$$\text{Pre } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{3}{2}\}.$$

1e) Ciele: • Ukázať Viétove vzťahy

• Ukázať dosadzovaciu metódu

• Stupeň čitateľa musí byť maximálne rovnaký ako stupeň menovateľa.

Zníženie stupňa čitateľa:

$$\int \frac{x^4}{x^4+2x^2-3} dx = \int 1 - \frac{2x^2-3}{x^4+2x^2-3}$$

Rozklad menovateľa (Viétove vzťahy)

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$a+b=2 \quad ab=-3 \quad \Rightarrow \quad a=3 \quad b=-1$$

$$\int 1 - \frac{2x^2-3}{(x^2+3)(x+1)(x-1)} dx = \int 1 - \frac{2x^2-3}{(x^2+3)(x+1)(x-1)} =$$

$$= \int \frac{A+B}{(x^2+3)} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1} dx = (*)$$

$$(Ax+B)(x+1)(x-1) + C(x^2+3)(x-1) + D(x^2+3)(x+1) = 2x^2-3$$

Funkcia vpravo = vľavo sa musia rovnať na definičnom obore

kde počítame integrál, takže aj v každom bode $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Takže tam môžeme dosadiť akékoľvek vhodné body. Najlepšie by bolo dosadiť práve body ± 1 . Tajomstvo je, že môžeme, lebo pre obe funkcie existuje jediné spojité rozšírenie do bodov $\{-1, 1\}$.

Dosadíme 1:

$$D(1^2+3) \cdot (1+1) = 2 \cdot 2^2 + 5$$

$$D = \frac{2 \cdot 2^2 + 5}{(1^2+3)(1+1)} = \frac{5}{8}$$

$$C = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

C a D sme získali dosadzovacou (zatvrdzovacou) metódou a ak nie sme odvážni, tak A a B dopodítame už porovnaním koeficientov.

Ja však budem odvážny, oba polynómi viete uvoľniť nad C a keď sa na to pozrieme, tak by sa nám veľmi oplatilo dosadiť $\sqrt{3} \cdot i$:

$$(A \cdot (\sqrt{3}i) + B)(-3-1) = -9 \Rightarrow A=0, B = \frac{9}{4}$$

$$f(x) = x - \int \left(\frac{1}{5} \frac{\frac{9}{4}}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2 + 1} + \frac{1}{3} + \frac{\frac{5}{8}}{x-1} \right) dx \stackrel{(*)}{=} x - \frac{5}{8} \ln|x-1| - \frac{1}{8} \ln|x+1| + \frac{3}{4} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}$$

~~reprezentácia~~

Pozrime sa na papierik a uvažme, čo by sme mohli použiť:

$$3) \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2-x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| + \sqrt{3} \arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$I_1 = \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \int \frac{1}{y} dy \stackrel{c}{=} \ln|x^2-x+1|$$

$$y = x^2 - x + 1$$

$$dy = 2x - 1 dx$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-x+1} = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} \frac{2}{\sqrt{3}} dx =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) = y$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} dx = dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{y^2+1} dy \stackrel{c}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$